

Bizonyítási módszerek

ÉV ELEJI FELADATOK

Év eleji feladatok

- ▶ Szükséges eszközök:
 - ▶ A4-es négyzetrácsos füzet
 - ▶ Letölthető tananyag: Emelt szintű matematika érettségi témakörök (2016)
 - ▶ Forrás: www.mozaik.info.hu (regisztráció után letölthető)
 - ▶ Négy színű toll, számológép, kis vonalzó

Év eleji feladatok

- ▶ Dolgozatok értékelése
 - ▶ Maximális pontszám százalékában
 - ▶ 30%-tól elégséges (2)
 - ▶ 55%-tól közepes (3)
 - ▶ 75%-tól jó (4)
 - ▶ 90%-tól jeles (5)
 - ▶ Dolgozatban **elméleti kérdések** és gyakorlati alkalmazások!
 - ▶ Két jegyes témazárók és egy jegyes röpdolgozatok
 - ▶ Témazáró dolgozatnál nyomdai állapotban levő NFT használható!
 - ▶ Dolgozatírásnál a **szükséges eszközök egymás között nem cserélgethetők!**

Év eleji feladatok

- ▶ Félévi illetve év végi értékelés
 - ▶ Alap óraszámban szerzett matematika jegyeidet figyelembe véve, szaktanároddal egyeztetve
- ▶ Honlapok:
 - www.mozaik.info.hu
 - Blog: <http://bolcsfoldi-matek.webnode.hu/>
 - www.oktatas.hu
 - Studium Generale: <http://www.studiumgenerale.hu/erettsegik-temakor-szerint>

Bizonyítási módszerek

- ▶ Matematika felépítése:
 - ▶ Fogalmak:
 - ▶ **Alapfogalmak**
 - ▶ szemlélet alapján fogadjuk el őket
 - ▶ **Definíciók**
 - ▶ Pontos meghatározás tartozik hozzájuk
 - ▶ Állítások:
 - ▶ **Axiómák** (alapigazságok)
 - ▶ Szemlélet alapján fogadjuk el őket
 - ▶ **Tételek**
 - ▶ Bizonyítjuk őket

Bizonyítás

- ▶ **Bizonyítás:**

- ▶ eljárás;
 - ▶ állítás helyességének indoklására;
 - ▶ matematikai logika elemeinek felhasználásával
- ▶ Bizonyítás során az alapfogalmakat, definíciókat, axiómákat és a korábban bebizonyított tételeket felhasználhatjuk.

Matematikai logika

- ▶ **Logika:** helyes következtetések tudománya
- ▶ **Kijelentés (állítás):** olyan kijelentő mondat, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis.
 - ▶ Az igaz illetve a hamis a kijelentés (állítás) **logikai értéke**.
- ▶ **Logikai műveletek:**
 - Tagadás (negáció): NEM
 - Összekapcsolás (konjunkció): ÉS
 - Szétválasztás (diszjunkció): VAGY
 - Következtetés (implikáció): HA ..., AKKOR ...
 - Egyenértékűség (ekvivalencia): ... AKKOR ÉS CSAK AKKOR, HA ...

Bizonyítási módszerek

- 1) Direkt bizonyítás
- 2) Indirekt bizonyítás
- 3) Teljes indukció
- 4) Skatulya-elv

Direkt bizonyítás

- ▶ **Leírása:** igaz állításokból (feltételekből) kiindulva helyes következtetésekkel eljutunk a bizonyítandó állításhoz (következményhez).
- ▶ A legtöbb matematikai tétel bizonyítása direkt módon történik.
- ▶ Példák direkt bizonyításra:
 - ▶ Pitagorasz-tétel
 - ▶ Thalesz-tétel

Indirekt bizonyítás

- ▶ Az indirekt bizonyítás két logikai törvényen alapul:
 - ▶ Minden kijelentés vagy igaz, vagy hamis.
 - ▶ Egy igaz kijelentés tagadása hamis, és fordítva, hamis kijelentés tagadása igaz.
- ▶ **Leírása:** feltesszük, hogy a bizonyítandó állítás nem igaz, és ebből kiindulva helyes következtetésekkel ellentmondásra (lehetetlen következményre) jutunk. Így a kiinduló feltevés volt téves, vagyis a bizonyítandó állítás valójában igaz.
- ▶ Indirekt bizonyítást akkor érdemes választani, ha az állítás tagadása könnyebben kezelhető, mint maga az állítás.
- ▶ Példák indirekt bizonyításra:
 - ▶ Pitagorasz-tétel megfordítása
 - ▶ Végtelen sok prímszám van.
 - ▶ A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

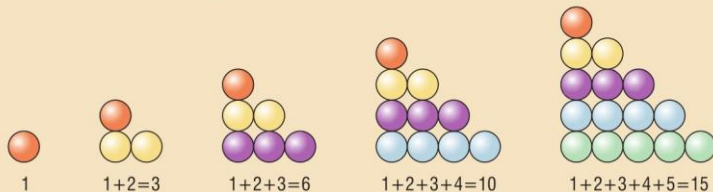
Teljes indukció

1. példa

Hány részre osztja a síkot egy adott P ponton átmenő n darab, egy síkban levő egyenes?

2. példa

Háromszögszámokat kapunk, ha kavicsokat háromszög alakban rendezünk el úgy, hogy mindegyik sorban 1-gyel több kavics van, mint a fölötte levőben. A háromszögszámok:



Mennyi a 100-adik háromszögszám? Mennyi az n -edik háromszögszám?

Teljes indukció

- ▶ Természetes számoktól függő állítások igazolására.
- ▶ Természetes számok: 0 és a pozitív egész számok
 - ▶ Megszámlálás:
 - ▶ a 0 természetes szám és
 - ▶ minden természetes számnak van rákövetkezője (nála 1-gyel nagyobb).
- ▶ **Leírása:** először bebizonyítjuk az állítást $n=0$ -ra (a probléma jellegéből adódóan $n=1$ -re vagy valamilyen konkrét értékre), majd feltételezzük, hogy az állítás igaz valamely n természetes számra (indukciós feltevés) és ennek felhasználásával bebizonyítjuk, hogy az állítás igazsága öröklődik $n+1$ -re.

Példák teljes indukcióra:

Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra:

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

4. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5. $h > -1$ -re és tetszőleges n természetes számra teljesül, hogy $(1 + h)^n \geq 1 + n \cdot h$ [**Bernoulli-egyenlőtlenség**]

A TELJES INDUKCIÓ ELVE:

Adott egy n pozitív egész számtól függő állítás.

1. **Bebizonyítjuk az állítást $n = 1$ -re;**

2. **Feltesszük, hogy az állítás igaz n -re (indukciós feltevés), és bebizonyítjuk $n + 1$ -re.**

Ezzel az állítást minden n pozitív egész számra bebizonyítottuk.

Skatulya-elv

- ▶ Leírása: n darab tárgyat k db skatulyában helyezünk el.
 - ▶ Ha $n > k$, akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább két tárgy kerül.
 - ▶ Ha $n > kp$ (p természetes szám), akkor biztosan lesz olyan skatulya, amelyikbe legalább $p+1$ db tárgy kerül.
- ▶ Skatulya-elvvel csoportosítással kapcsolatos problémákat bizonyítunk.
- ▶ Például: Ha adott $n+1$ darab pozitív egész szám, akkor ezek között biztosan van kettő olyan, amelyek különbsége osztható n -nel.

Házi feladatok:

1. Bizonyítsa be, hogy az $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ összefüggés minden n természetes számra teljesül.
2. Bizonyítsa be, hogy 25 fős társaságban biztosan van 3 fő, akik azonos csillagjegyben születtek.

Versenyszfeladatok:

1. Egy derékszögű háromszög oldalainak hossza egész szám. Igazolja, hogy a háromszög az egyik csúcsán átmenő két egyenessel három egyenlő területű részre vágható úgy, hogy a kapott részek területének a mérőszáma is egész szám!
2. Az ABC háromszögben $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ hosszúságú, és az oldalak hosszaira teljesül, hogy $a^3 + b^3 = c^3$. Bizonyítsa be, hogy $\angle BCA < 90^\circ$.
3. Elhelyezhető-e a térben 11 pont úgy, hogy az általuk meghatározott egyenes száma 53 legyen? Lehet-e a 11 pont által meghatározott egyenesek száma 54? Állítását indokolja!